## 7 класс

**Задача 7.1. Фиксискорость.**

ДимДимыч и фиксик Нолик решили устроить дружеское соревнование по бегу. Чтобы уравнять шансы, ДимДимыч поставил фиксика на расстоянии 2 м от финиша, а сам стартовал на 90 м дальше. Нолик бежал изо всех сил, со скоростью 10 фиксиметров в секунду, но ДимДимыч всё равно финишировал на 1 секунду раньше. Через неделю упорных тренировок Нолика друзья повторили забег, но теперь ДимДимыч стартовал на 8 м ближе к фиксику, чем в первый раз. Несмотря на это, Нолик, развив скорость в 12 фиксиметров в секунду, обогнал друга на 1 секунду. Определите, сколько фиксиметров содержится в одном человеческом метре. Дистанция, пробегаемая Noликом, и скорость ДимДимыча каждый раз была одна и та же. Скорость участников во время бега считать постоянной.

**Ответ:** 120 фиксиметров в 1 метре.

**Решение:** Пусть $N$ — количество фиксиметров в одном человеческом метре. Тогда скорость Нолика в первом забеге была $\frac{10}{N}$ м/с, а во втором — $\frac{12}{N}$ м/с.

Рассмотрим первый забег. ДимДимыч там пробежал 92 м с некоторой скоростью $v$. Так как он прибежал на 1 секунду раньше фиксика

$$\frac{2\text{ м}}{\frac{10}{N}\text{ м/с}} - \frac{92\text{ м}}{v} = 1\text{ с} \quad \Rightarrow \quad 0{,}2\text{ с}\cdot N - \frac{92\text{ м}}{v} = 1\text{ с}.$$

Во втором случае ДимДимыч пробежал 84 м и прибежал на 1 секунду позже Нолика. Поэтому

$$\frac{84\text{ м}}{v} - \frac{2\text{ м}}{\frac{12}{N}\text{ м/с}} = 1\text{ с} \quad \Rightarrow \quad \frac{84\text{ м}}{v} - 1/6\text{ с}\cdot N = 1\text{ с}.$$

Из полученных уравнений находим, что

$$\begin{cases} N - \frac{5\cdot 92\text{ м/с}}{v} = 5, \\ \frac{6\cdot 84\text{ м/с}}{v} - N = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{6\cdot 84\text{ м/с}}{v} - \frac{5\cdot 92\text{ м/с}}{v} = 11 \quad \Rightarrow \quad \frac{44\text{ м/с}}{v} = 11 \quad \Rightarrow \quad v = 4\text{ м/с}.$$

Отсюда получаем значение $N$:

$$0{,}2\text{ с}\cdot N - \frac{92\text{ м}}{4\text{ м/с}} = 1\text{ с} \quad \Rightarrow \quad N = 120.$$

**Критерии:**

1) Скорости Нолика в первом и втором случае выражены через одну величину (например, через $N$) . . 2 балла
2) Записано уравнение $\frac{2\text{ м}}{\frac{10}{N}\text{ м/с}} - \frac{92\text{ м}}{v} = 1$ с для первого забега (или его аналог) . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
3) Записано уравнение $\frac{84\text{ м}}{v} - \frac{2\text{ м}}{\frac{12}{N}\text{ м/с}} = 1$ с для второго забега (или его аналог) . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
4) Найдено значение $N$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 балла

*Указание проверяющим:*

1) Учащийся может сначала найти скорость Нолика в м/с для какого-либо случая, а потом найти $N$; может выразить все длины в фиксиметрах и т.п. Необходимо внимательно изучить решение учащегося и соотнести его с указанными критериями.

2) Если в процессе решения правильной системы уравнений учащийся верно нашёл какую либо скорость (например, скорость ДимДимыча), но ошибся в подсчёте $N$, за пункт 4 ставить 2 балла из 4.

**Задача 7.2. Вода и кубики.**

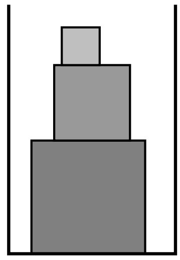

Рис. 7.1.

В цилиндрическом сосуде друг на друге лежат три кубика (см. рис. 7.1). Ребро среднего кубика в два раза длиннее ребра верхнего, а ребро нижнего больше ребра верхнего кубика в три раза. В сосуд начинают медленно наливать воду. До верхней грани большого кубика вода поднимается со скоростью $v_1 = 18$ мм/мин. От нижней до верхней грани среднего кубика она поднимается со скоростью $v_2 = 8$ мм/мин.

1. С какой скоростью $v_3$ вода будет подниматься от нижней до верхней грани маленького кубика?
2. Какова средняя скорость $v_{ср}$ поднятия уровня воды от дна сосуда до верхней грани маленького кубика?

Объём воды, поступающей в сосуд в единицу времени, в течение всего эксперимента не меняется.

**Ответ:** 1) 6 мм/мин; 2) 10,3 мм/мин.

**Решение:** Пусть $a$ — длина ребра верхнего куба, а $S$ — площадь дна сосуда. Объём воды, поступающей в сосуд в единицу времени, можно записать как произведение площади свободной от кубика части сечения сосуда и скорости подъёма воды. Так как эта величина в течение эксперимента не меняется, получаем

$$(S-(3a)^2)v_1 = (S-(2a)^2)v_2 = (S-a^2)v_3.$$

Из первого равенства найдём площадь $S$:

$$(S-9a^2)\cdot 18\ \text{мм/мин} = (S-4a^2)\cdot 8\ \text{мм/мин} \quad\Rightarrow\quad 18S - 162a^2 = 8S - 32a^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 10S = 130a^2 \quad\Rightarrow\quad S = 13a^2$$

и подставим во второе равенство:

$$(S-4a^2)\cdot 8\ \text{мм/мин} = (S-a^2)v_3 \quad\Rightarrow\quad v_3 = \frac{(S-4a^2)\cdot 8\ \text{мм/мин}}{S-a^2} = \frac{(13a^2-4a^2)\cdot 8\ \text{мм/мин}}{13a^2-a^2} = 6\ \text{мм/мин}.$$

Рассчитаем теперь среднюю скорость поднятия воды. Высота первого участка равна $3a$, второго — $2a$, третьего — $a$, поэтому

$$v_{ср} = \frac{3a+2a+a}{\frac{3a}{v_1}+\frac{2a}{v_2}+\frac{a}{v_3}} = \frac{6}{\frac{3}{18\ \text{мм/мин}}+\frac{2}{8\ \text{мм/мин}}+\frac{1}{6\ \text{мм/мин}}} \approx 10{,}3\ \text{мм/мин}.$$

**Критерии:**

1) Записано уравнение $(S-9a^2)v_1 = (S-4a^2)v_2$ или его аналог . . . . . . . . . . 1 балл
2) Найдена связь между $S$ и $a^2$ . . . . . . . . . . 2 балла
3) Записано уравнение $(S-4a^2)v_2 = (S-a^2)v_3$ (или аналогичное равенство с $v_1$ и $v_3$) . . . . . . . . . . 1 балл
4) Найдено значение скорости $v_3$ . . . . . . . . . . 2 балла
5) Записана верная формула для $v_{ср}$ через $v_1$, $v_2$, $v_3$ . . . . . . . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение $v_{ср}$ . . . . . . . . . . 2 балла

**Задача 7.3. Туристы.**

Лосяш и Копатыч как-то отправились в поход с одной ночёвкой на поляне в лесу. Друзья вышли в 9 часов утра, после чего дотошный Лосяш стал каждые 6 часов заносить в свой дневник данные о пройденном расстоянии (см. таблицу на рис. 7.2). Переночевав и съев запасы, Лосяш и Копатыч отправились налегке в обратный путь по той же самой дороге и вернулись домой в 14 ч 50 мин.

1. С какой скоростью Лосяш и Копатыч возвращались домой?
2. Сколько времени друзья были на поляне?

Считать, что скорости путешественников по дороге туда и по дороге обратно были постоянными, а находясь на поляне, они не перемещались.

| время | 9:00 | 15:00 | 21:00 | 3:00 | 9:00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $s$, км | 0 | 15 | 30 | 33 | 45 |

Рис. 7.2.

**Ответ:** 1) 3,6 км/ч; 2) 7 ч 28 мин.

**Решение:** Друзья идут в сторону поляны со скоростью

$$v_1 = \frac{15\text{ км}}{6\text{ ч}} = 2{,}5\text{ км/ч}.$$

В промежутке между 21:00 и 3:00 они за 6 часов прошли меньше 15 км, следовательно где-то после 21:00 Копатыч и Лосяш остановились на поляне. Путь до поляны составил не менее 30 км, поэтому общее расстояние, пройденное за весь поход, составило минимум 60 км. Из второй части таблицы видно, что в между 3:00 и 9:00 следующего дня они за 6 часов друзья прошли 12 км, а с 9:00 до 14:50 (почти 6 часов) — не менее 15 км. Из приведённого рассуждения следует, что, во-первых, Лосяш и Копатыч ушли с поляны уже где-то после 3 часов ночи, а, во-вторых, расстояние от дома до поляны равно 33 км.

Весь путь равен 66 км, поэтому скорость друзей по дороге обратно составила

$$v_2 = \frac{66\text{ км} - 45\text{ км}}{5\text{ ч }50\text{ мин}} = \frac{21\text{ км}}{35/6\text{ ч}} = 3{,}6\text{ км/ч}.$$

Найдём время прихода на поляну. После 21:00 туристы должны пройти ещё 3 км. На это им потребуется время

$$t_1 = \frac{3\text{ км}}{v_1} = \frac{3\text{ км}}{2{,}5\text{ км/ч}} = 1{,}2\text{ ч} = 1\text{ ч }12\text{ мин}.$$

Следовательно, друзья пришли на место в 22 ч 12 мин.

Найдём теперь время ухода. До 9:00 утра им нужно пройти 12 км. На это Лосяшу с Копатычем потребуется время

$$t_2 = \frac{12\text{ км}}{v_2} = \frac{12\text{ км}}{3{,}6\text{ км/ч}} = 3\frac{1}{3}\text{ ч} = 3\text{ ч }20\text{ мин}.$$

Отсюда получаем, что друзья ушли с поляны в 5 ч 40 мин.

Окончательно получаем, что из 12 часов в промежутке между 21:00 и 9:00 утра Лосяш и Копатыч находились на поляне в течение

$$12\text{ ч} - 1\text{ ч }12\text{ мин} - 3\text{ ч }20\text{ мин} = 7\text{ ч }28\text{ мин}.$$

**Критерии:**

1) Найдена скорость по дороге к поляне . . . . . . . . . . 1 балл
2) Обосновано, что расстояние до поляны равно 33 км . . . . . . . . . . 2 балла
3) Найдена скорость по дороге обратно . . . . . . . . . . 2 балла
4) Найдено время прихода друзей на поляну или время $t_1$ . . . . . . . . . . 2 балла
5) Найдено время ухода друзей с поляны или время $t_2$ . . . . . . . . . . 2 балла
6) Найдено время пребывания друзей на поляне . . . . . . . . . . 1 балл

*Указания проверяющим:*

1) Обоснование (пункт 2) должно содержать объяснение, почему друзья ушли с поляны не раньше 3 часов ночи. Иначе расстояние до поляны могло бы быть и больше 33 км.

2) Если расстояние до поляны указано без необходимого обоснования, баллы за пункт 2 не ставить, а остальные пункты оценивать независимо.

3) Вместо времени прихода (22:12) или величины $t_1$ учащийся может найти время всего пути к поляне (13 ч 12 мин). В этом случае за пункт 4 ставить полный балл.

4) Вместо времени ухода (5:40) или величины $t_2$ учащийся может найти время всего пути до дома (9 ч 10 мин). В этом случае за пункт 5 ставить полный балл.

5) Скорость по дороге **к поляне** может быть не представлена явно. Если за пункт 4 стоит полный балл, то балл за пункт 1 ставить автоматически.

**Задача 7.4. Встречи на дороге.**

Два автомобиля выехали из одной точки по одной и той же дороге в одном направлении, но в разное время. Графики зависимости пройденного каждым автомобилем пути от времени движения представлены на рис. 7.3.

1. Насколько позже стартовал автомобиль №2, если машины встретились на дороге через 1,5 ч после старта первого автомобиля?
2. Через сколько минут после первой встречи автомобили встретятся на дороге снова?
3. На каком расстоянии от места старта это произойдёт?

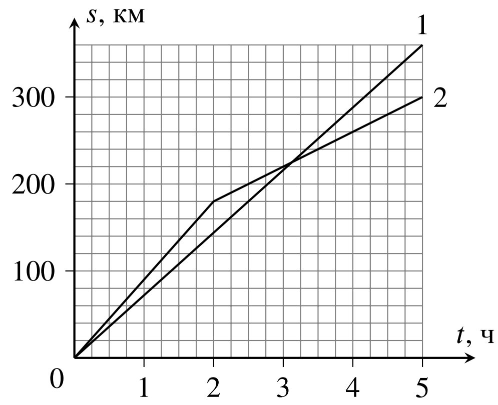


Рис. 7.3.

**Ответ:** 1) 18 мин; 2) 75 мин; 3) 198 км.

**Решение:** Определим сначала скорости автомобилей. Для этого возьмём точки на графике, попадающие в узлы координатной сетки и, при этом, максимально разнесённые друг от друга (для большей точности). Первый автомобиль движется с постоянной скоростью $v = \frac{360\text{ км}}{5\text{ ч}} = 72$ км/ч. Второй автомобиль первые 2 ч двигался со скоростью $u_1 = \frac{180\text{ км}}{2\text{ ч}} = 90$ км/ч, а потом 3 ч со скоростью $u_2 = \frac{300\text{ км}-180\text{ км}}{3\text{ ч}} = 40$ км/ч.

Пусть второй автомобиль стартовал через время $t_0$ после первого. По условию, через 1,5 часа после старта первого автомобиля они встретились. Эта встреча произошла на расстоянии $s_{\text{в}1} = v \cdot 1{,}5\text{ ч} = 108$ км/ч от места старта. Отсюда получим, что

$$u_1(1{,}5\text{ ч} - t_0) = 108\text{ км} \quad \Rightarrow \quad 1{,}5\text{ ч} - t_0 = \frac{108\text{ км}}{90\text{ км/ч}} = 1{,}2\text{ ч} \quad \Rightarrow \quad t_0 = 0{,}3\text{ ч} = 18\text{ мин}.$$

Найдём теперь время $\tau$ между двумя встречами автомобилей. Первый автомобиль добрался до места второй встречи за время $1{,}5\text{ ч} + \tau$, а второй — за время $1{,}5\text{ ч} + \tau - t_0$. Первые 2 ч второй автомобиль ехал со скоростью $u_1$, а оставшееся время — со скоростью $u_2$. Приравняем пройденные машинами пути:

$$v(1{,}5\text{ ч} + \tau) = u_1 \cdot 2\text{ ч} + u_2(1{,}5\text{ ч} + \tau - t_0 - 2\text{ ч}) \quad \Rightarrow \quad 108\text{ км} + 72\text{ км/ч} \cdot \tau = 180\text{ км} - 32\text{ км} + 40\text{ км/ч} \cdot \tau \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 32\text{ км/ч} \cdot \tau = 40\text{ км} \quad \Rightarrow \quad \tau = 1{,}25\text{ ч} = 75\text{ мин}.$$

Пройденный первым автомобилем путь до места второй встречи будет равен

$$s = v(1{,}5\text{ ч} + \tau) = v \cdot 2{,}75\text{ ч} = 72\text{ км/ч} \cdot 2{,}75\text{ ч} = 198\text{ км}.$$

**Критерии:**

1) Найдена скорость $v$ . . . . . . . . . . 1 балл
2) Найдены скорости $u_1$ и $u_2$ . . . . . . . . . . 1 балл
3) Найдено время запаздывания $t_0$ . . . . . . . . . . 2 балла
4) Записано верное уравнение для определения $\tau$ . . . . . . . . . . 2 балла
5) Найдено время между двумя встречами $\tau$ . . . . . . . . . . 2 балла
6) Найдено расстояние от старта до места второй встречи . . . . . . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

1) Если верно найдена только одна из скоростей в пункте 2, ставить за этот пункт 0,5 балла.
2) Если учащийся ошибся в определении скоростей по графику, но далее использовал верные (с физической точки зрения) уравнения, то баллы снимаются только за пункты 1 и 2. Остальные пункты оценивать независимо.
3) Если учащийся определял какие-то иные величины по графику (например, $s_{\text{в}1} \approx 110$ км), внося этим дополнительные погрешности, те из пунктов 3, 5 или 6 критериев, где это было использовано, оценивать максимум в 1 балл.

Максимально возможный балл в 7 классе . . . . . . . . . . 40

## 8 класс

**Задача 8.1. Моторная лодка.**

Моторная лодка прошла от пристани Борисово вниз по течению реки до пристани Гуськово, а через некоторое время обратно, вверх по реке, до пристани Борисово. Средняя скорость лодки на **всём** пути была равна $v$, а время стоянки в Гуськово составило 1/10 времени всего путешествия. Чему равна скорость лодки $u$ в стоячей воде, если она больше скорости течения реки в 3 раза? Считать, что лодка движется вверх и вниз по течению равномерно, а скорость течения реки не меняется.

**Ответ:** $5v/4$.

**Решение:** По условию скорость течения реки равна $v_{\text{теч}} = u/3$. Лодка идёт вниз по течению со скоростью $v_{\text{по}} = u + v_{\text{теч}} = 4u/3$, а против течения — со скоростью $v_{\text{против}} = u - v_{\text{теч}} = 2u/3$.

Пусть $s$ — расстояние между пристанями, тогда время всего путешествия равно $t = 2s/v$, а время стоянки в Гуськово

$$t_{\text{ост}} = \frac{t}{10} = \frac{2s}{10v}.$$

Следовательно

$$t = \frac{s}{v_{\text{по}}} + \frac{s}{v_{\text{против}}} + t_{\text{ост}} \quad\Rightarrow\quad \frac{2s}{v} = \frac{s}{v_{\text{по}}} + \frac{s}{v_{\text{против}}} + \frac{2s}{10v} \quad\Rightarrow\quad \frac{9s}{5v} = \frac{s}{4u/3} + \frac{s}{2u/3} = \frac{3s}{4u} + \frac{3s}{2u} = \frac{9s}{4u}.$$

Отсюда получаем, что $u = 5v/4$.

**Критерии:**

1) Записано выражение для скорости лодки по течению $v_{\text{по}}$ через $u$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
2) Записано выражение для скорости лодки против течения $v_{\text{против}}$ через $u$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
3) Записано выражение для времени стоянки $t_{\text{ост}}$ лодки в Гуськово . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
4) Записано уравнение, связывающее среднюю скорость с $v_{\text{по}}$ и $v_{\text{против}}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
5) Найдена скорость $u$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:* Учащийся может сразу связать верные выражения для $v_{\text{по}}$, $v_{\text{против}}$ и/или $t_{\text{ост}}$ и среднюю скорость. В этом случае баллы за пункты 1, 2 и/или 3 ставятся в полном объёме.

**Задача 8.2. Топим стакан.**

В большой ванне с водой плавает цилиндрический пенопластовый стакан, до краёв заполненный водой, погружаясь на 75% своего объёма. Мальчик Паша стал аккуратно, на тонкой ниточке, по одному опускать в стакан алюминиевые грузики. Ёмкость стакана равна 210 см$^3$, масса одного грузика — 9,5 г. Какое максимальное число грузиков Паша сможет опустить, чтобы не утопить стакан? Плотность пенопласта равна 50 кг/м$^3$, плотность алюминия — 2700 кг/м$^3$, плотность воды — 1000 кг/м$^3$.

**Ответ:** 11 штук.

**Решение:** Пусть $M$ — масса стакана (без содержимого), $V = 210$ см$^3$ — его ёмкость. Запишем условие плавания стакана в первом случае:

$$(\rho_{\text{в}}V + M)g = 0{,}75\rho_{\text{в}}g\left(V + \frac{M}{\rho_{\text{п}}}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{в}}V + M = 0{,}75\rho_{\text{в}}V + \frac{0{,}75\rho_{\text{в}}M}{\rho_{\text{п}}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{0{,}25\rho_{\text{в}}V}{0{,}75\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{п}} - 1} = 3{,}75 \text{ г.}$$

Пусть $m$ — масса одного грузика. Найдём теперь минимальное их количество $N$, при котором стакан полностью погрузится в воду, учитывая, что объём воды в стакане уменьшается на величину объёма погружённых тел $V_{\text{гр}} = Nm/\rho_{\text{ал}}$. Запишем еще раз условие плавания:

$$(\rho_{\text{в}}(V - V_{\text{гр}}) + M + Nm)g = \rho_{\text{в}}g\left(V + \frac{M}{\rho_{\text{п}}}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{в}}V - \frac{\rho_{\text{в}}Nm}{\rho_{\text{ал}}} + M + Nm = \rho_{\text{в}}V + \frac{\rho_{\text{в}}M}{\rho_{\text{п}}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Nm\left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ал}}}\right) = M\left(\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{п}}} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{M}{m} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{п}} - 1}{1 - \rho_{\text{в}}/\rho_{\text{ал}}} \approx 11{,}9.$$

Отсюда следует, что максимальное количество грузиков, которое ещё не утопит стакан, равно 11.

**Критерии:**

1) Записано условие плавания для стакана без грузиков . . . . . 2 балла
2) Найдена масса или объём стенок стакана . . . . . 1 балл
3) Найден объём воды, оставшейся в стакане после погружения грузиков . . . . . 1 балл
4) Записано условие плавания для стакана с грузиками . . . . . 2 балла
5) Найдено значение $N$, при котором стакан погрузится полностью . . . . . 2 балла
6) Записано, что максимальное количество грузиков, которое не утопит стакан, равно 11 . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

1) Масса (или объём стенок) стакана могут быть записаны в виде формулы, связывающей данные из условия, без подсчёта числового значения. В этом случае балл за пункт 2 ставить.

2) Объём воды, оставшийся в стакане, может быть сразу записан внутри второго условия плавания. В этом случае баллы за пункт 3 ставить автоматически.

**Задача 8.3. Сообщающиеся сосуды на новый лад.**
В высоком теплоизолированном сосуде, разделённом тонкой вертикальной перегородкой на две неравные части, находится слой воды высотой $H = 10$ см при температуре $t_1 = 12\,^\circ$C. Площадь сечения широкой части сосуда в два раза больше площади сечения узкой, а между перегородкой и дном есть небольшой зазор (см. рис. 8.1). В широкую часть сосуда налили керосин при температуре $t_2 = 75\,^\circ$C так, что верхняя поверхность керосина оказалась на высоте $H_1 = 21$ см от дна сосуда. Определите установившуюся температуру жидкостей в сосуде. Удельная теплоёмкость керосина равна 2100 Дж/(кг·°C), воды — 4200 Дж/(кг·°C). Плотность керосина 800 кг/м$^3$, плотность воды — 1000 кг/м$^3$. Стенки сосуда вертикальны, теплоёмкостью стенок и перегородки можно пренебречь.

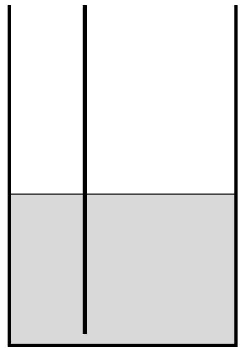
Рис. 8.1.

**Ответ:** 30 °C.

**Решение:** Пусть $S$ — площадь сечения левого сосуда, тогда площадь сечения правого равна $2S$. Масса воды в сосуде $m_в = \rho_в H \cdot 3S$. После того, как в широкую часть сосуда налили керосин, уровень воды там опустился на некоторую величину $x$, а в узкой части, соответственно, поднялся на $2x$ (см. рис. 8.2).

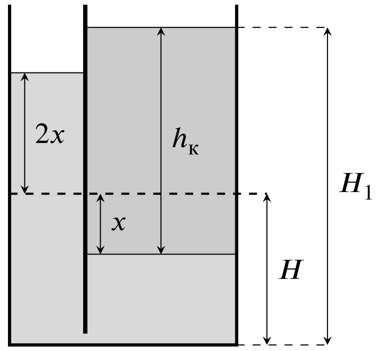

Рис. 8.2.

Пусть $h_к$ — высота слоя налитого керосина. Тогда

$$H_1 = H + h_к - x \quad \Rightarrow \quad h_к = x + 11 \text{ см}.$$

Запишем условие равенства давлений на уровне нижней границы керосина:

$$\rho_к g h_к = \rho_в g \cdot 3x \quad \Rightarrow \quad h_к = \frac{3\rho_в x}{\rho_к} = \frac{15x}{4}.$$

Отсюда получаем, что

$$15x/4 = x + 11 \text{ см} \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ см}, h_к = 15 \text{ см}.$$

Запишем теперь уравнение теплового баланса, учитывая, что масса керосина равна $m_к = \rho_к h_к \cdot 2S$:

$$c_в m_в (t_{уст} - t_1) = c_к m_к (t_2 - t_{уст}) \quad \Rightarrow \quad c_в \rho_в H \cdot 3S(t_{уст} - t_1) = c_к \rho_к h_к \cdot 2S(t_2 - t_{уст}) \quad \Rightarrow$$

$$t_2 - t_{уст} = \frac{3c_в \rho_в H}{2c_к \rho_к h_к} \cdot (t_{уст} - t_1) = 2{,}5(t_{уст} - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_{уст} = \frac{t_2 + 2{,}5t_1}{3{,}5} = 30\,^\circ\text{C}.$$

**Критерии:**

1) Записано выражение для массы воды в сосуде . . . . . . . . . . 0,5 балла
2) Записано выражение для массы керосина в сосуде . . . . . . . . . . 0,5 балла
3) Указано, что изменения высоты уровня воды в широкой и узкой частях сосуда отличаются в 2 раза . . 1 балл
4) Записана связь между $H_1$, $H$, $h_к$ и изменением уровня воды . . . . . . . . . . 1 балл
5) Записано условие равенства давлений . . . . . . . . . . 2 балла
6) Найдена высота слоя керосина . . . . . . . . . . 2 балла
7) Записано уравнение теплового баланса . . . . . . . . . . 1 балл
8) Найдена установившаяся температура $t_{уст}$ . . . . . . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*
1) Выражения для массы воды и/или керосина могут быть сразу записаны внутри уравнения теплового баланса. В этом случае баллы за пункты 1 и/или 2 ставить автоматически.
2) Указание на то, что изменение уровней отличаются вдвое, может быть у учащегося на рисунке или сразу в условии равенства давлений. В этом случае балл за пункт 3 ставить.

**Задача 8.4. Тающее равновесие.**

На двух опорах лежит однородный стержень массой $M = 450$ г. К концам стержня подвешены два разных куска льда с массами $m_1 = 400$ г и $m_2 = 100$ г. Конструкцию осветило солнце, и обе льдинки начали одновременно таять. Скорость таяния большого куска равна $\mu_1 = 1{,}4$ г/мин, скорость таяния маленького $\mu_2 = 1{,}0$ г/мин.

1. Чему были равны силы давления стержня на опоры до того, как лёд начал таять?
2. Через какое время после начала таяния кусков льда конструкция опрокинется?

Длина стержня в 3 раза больше расстояния между опорами, относительно которых стержень лежит симметрично (см. рис. 8.3). Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг.

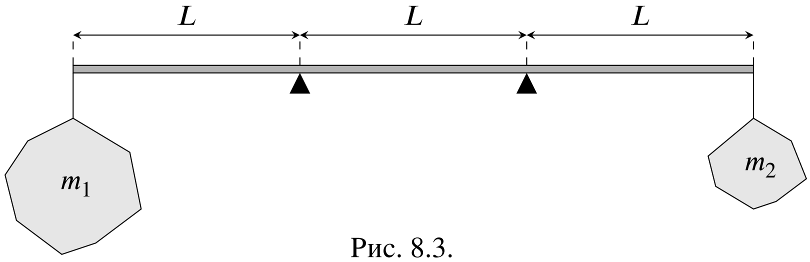


Рис. 8.3.

**Ответ:** 1) 9,25 Н и 0,25 Н; 2) 41 мин 40 с.

**Решение:** Рассмотрим силы, действующие на стержень до начала процесса таяния. Обозначим $N_л$ и $N_п$ силы, действующие на него со стороны левой и правой опоры соответственно. Запишем условие, что равнодействующая всех этих сил равна нулю:

$$Mg + m_1 g + m_2 g = N_л + N_п \quad \Rightarrow \quad N_л + N_п = 9{,}5 \text{ Н}.$$

Теперь запишем правило моментов относительно левой опоры:

$$m_1 g L + N_п L = m_2 g \cdot 2L + Mg \cdot L/2 \quad \Rightarrow \quad N_п = 2m_2 g + Mg/2 - m_1 g = 0{,}25 \text{ Н}.$$

Следовательно, $N_л = 9{,}5 \text{ Н} - 0{,}25 \text{ Н} = 9{,}25$ Н.

Левый кусок льда изначально был тяжелее, скорость его таяния больше, но не в 4 раза (тогда бы он растаял быстрее маленького куска). Это означает, что рычаг может опрокинуться только влево. Рассмотрим момент отрыва $t$ стержня от правой опоры и запишем правило моментов в этом случае относительно левой:

$$(m_1 - \mu_1 t)gL = (m_2 - \mu_2 t)g \cdot 2L + Mg \cdot L/2.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$m_1 - \mu_1 t = 2m_2 - 2\mu_2 t + M/2 \quad \Rightarrow \quad (2\mu_2 - \mu_1)t = 2m_2 + M/2 - m_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{2m_2 + M/2 - m_1}{2\mu_2 - \mu_1} = \frac{2 \cdot 100 \text{ г} + 225 \text{ г} - 400 \text{ г}}{2 \cdot 1 \text{ г/мин} - 1{,}4 \text{ г/мин}} = \frac{25 \text{ г}}{0{,}6 \text{ г/мин}} = 41\frac{2}{3} \text{ мин} = 41 \text{ мин } 40 \text{ с}.$$

**Критерии:**

1) Записано правило моментов до начала таяния . . . . . 2 балла
2) Записано условие равенства сил до начала таяния . . . . . 1 балл
3) Найдены силы $N_л$ и $N_п$ . . . . . 1 балл
4) Записаны законы изменения массы каждого куска со временем . . . . . 1 балл
5) Указано, что в момент опрокидывания сила реакции со стороны правой опоры отсутствует . . . . . 1 балл
6) Записано правило моментов . . . . . 2 балла
7) Найдено время опрокидывания $t$ . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

1) В пункте 2 вместо условия равенства сил может быть записано правило моментов относительно иной, чем в пункте 1, точки. В этом случае за первое верно написанное правило моментов ставить 2 балла, а за второе — 1 балл (как за пункт 2 критериев).

2) Закон изменения массы (например, для первого куска $m_1 - \mu_1 t$) может быть сразу записан внутри правила моментов. В этом случае баллы за пункт 4 ставить автоматически.

3) Если отсутствует **явно написанное** указание, что сила реакции правой опоры в момент опрокидывания равна нулю, балл за пункт 5 не ставить! Остальные пункты при этом оцениваются независимо.

4) Для ориентировки: в секундах время до опрокидывания равно 2500 с.

Максимально возможный балл в 8 классе . . . . . 40

## 9 класс

**Задача 9.1. В полёте.**

Мячик бросили вертикально вверх с некоторой большой высоты. Какова была начальная скорость мячика, если за 2 с от момента броска он прошёл **путь**, равный 10,4 м? Рассмотрите все возможные варианты. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с$^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Ответ:** 12 м/с или 8 м/с.

**Решение:** Пусть $v$ — начальная скорость мячика. Рассмотрим первый вариант, когда за время $t = 2$ с полёта мячик двигался строго вверх. В этом случае путь $s = 10{,}4$ м совпадает с величиной перемещения, поэтому

$$s = vt - \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{s}{t} + \frac{gt}{2} = 15{,}2 \text{ м/с}.$$

Однако конечная скорость мячика, при этом, будет отрицательной

$$v_{\text{кон}} = v - gt = -4{,}8 \text{ м/с} < 0.$$

Из этого следует, что первый вариант невозможен.

Перейдём теперь ко второму варианту, когда мячик сначала поднялся на некоторую высоту $h$, а затем пролетел вниз расстояние $s - h$. Так как время подъёма равно $t_{\text{под}} = v/g$, а высота $h = v^2/(2g)$, получаем, что

$$s - h = \frac{g(t - t_{\text{под}})^2}{2} \quad \Rightarrow \quad s - \frac{v^2}{2g} = \frac{g}{2} \cdot \left(t^2 - \frac{2vt}{g} + \frac{v^2}{g^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{g} - vt + \frac{gt^2}{2} - s = 0.$$

Решаем полученное уравнение и находим оба решения:

$$v = \frac{g}{2} \cdot \left(t \pm \sqrt{\frac{4s}{g} - t^2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = 12 \text{ м/с}, v_2 = 8 \text{ м/с}.$$

**Критерии:**

1) Рассмотрен первый случай (движение в одном направлении) . . . . . . . . . . 1 балл
2) Показано, что в этом случае получается противоречие . . . . . . . . . . 2 балла
3) Записано выражение для $h$ через $v$ во втором случае . . . . . . . . . . 1 балл
4) Записано выражение для $t_{\text{под}}$ через $v$ во втором случае . . . . . . . . . . 1 балл
5) Записано правильное уравнение для нахождения $v$ . . . . . . . . . . 3 балла
6) Найдены оба решения $v_1$ и $v_2$ . . . . . . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

1) Балл за пункт 1 ставится, если учащийся прямо указал на существование этого варианта. Простого написания формулы $s = vt - gt^2/2$ недостаточно.

2) Вместо $t_{\text{под}}$ учащийся может найти время возвращения мяча в точку броска. Балл за пункт 4 в этом случае ставить.

3) Если учащийся нашёл только одно правильное значение скорости (второе было найдено неверно или, по каким-то причинам, отброшено), за пункт 6 ставить 1 балл из двух.

**Задача 9.2. Вес в жидкости.**

В цилиндрическом сосуде находится сплошной металлический куб. Когда в сосуд налили 240 г керосина, он полностью покрыл куб, и вес куба оказался равным 9,6 Н. Если же вместо керосина в сосуд налить 200 г воды, вес куба не изменится.

1. Какова длина ребра куба, если площадь дна сосуда в три раза больше площади грани этого куба?
2. Чему равна плотность металла, из которого сделан куб?
3. Насколько уровень керосина в первом случае выше верхней грани куба?

Жидкости могут свободно подтекать под нижнюю грань куба. Плотность воды равна 1000 кг/м$^3$, керосина — 800 кг/м$^3$. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с$^2$.

**Ответ:** 1) 5 см; 2) 8480 кг/м$^3$; 3) на 0,7 см.

**Решение:** Пусть $a$ — длина ребра куба, тогда площадь дна сосуда равна $S = 3a^2$. В первом случае керосин полностью покрывает куб, поэтому объём погружённой части куба равен его полному объёму $V = a^3$. Выталкивающая сила, действующая на куб, равна $F_A = \rho_\text{к} g a^3$.

Во втором случае вес куба не меняется. Как следствие, не меняется и выталкивающая сила, действующая на него. Так как плотность воды больше плотности керосина, то объём погружённой части $V'$ должен быть меньше $V$. Найдём высоту слоя воды

$$h_\text{в} = \frac{V'}{a^2} = \frac{F_A}{\rho_\text{в} g a^2} = \frac{\rho_\text{к} a}{\rho_\text{в}} = 0{,}8a.$$

Масса воды равна $m_\text{в} = 200$ г, поэтому

$$m_\text{в} = \rho_\text{в} h_\text{в}(S - a^2) = \rho_\text{в} \cdot 0{,}8a \cdot 2a^2 \quad \Rightarrow \quad a^3 = \frac{m_\text{в}}{1{,}6\rho_\text{в}} = 125 \text{ см}^3 \quad \Rightarrow \quad a = 5 \text{ см}.$$

Запишем вес куба в керосине ($\rho$ — плотность металла):

$$P = \rho g a^3 - \rho_\text{к} g a^3 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{P}{g a^3} + \rho_\text{к} = \frac{9{,}6 \text{ Н}}{10 \text{ м/с}^2 \cdot 0{,}000125 \text{ м}^3} + 800 \text{ кг/м}^3 = 8480 \text{ кг/м}^3.$$

Пусть поверхность керосина находится на высоте $x$ верхней гранью кубика. Тогда объём керосина равен

$$V_\text{к} = (S - a^2) \cdot a + Sx = 2a^3 + 3a^2 x.$$

С другой стороны, $V_\text{к} = (240 \text{ г})/\rho_\text{к} = 300 \text{ см}^3$. Приравнивая, получаем

$$2a^3 + 3a^2 x = 300 \text{ см}^3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{300 \text{ см}^3 - 2a^3}{3a^2} = \frac{300 \text{ см}^3 - 250 \text{ см}^3}{3 \cdot 25 \text{ см}^2} \approx 0{,}7 \text{ см}.$$

**Критерии:**

1) Обосновано, что куб в воду погружён не полностью . . . . . 1 балл
2) Найдена высота слоя воды . . . . . 1 балл
3) Найдена длина ребра куба . . . . . 2 балла
4) Записано выражение для веса куба в керосине (или в воде) . . . . . 1 балл
5) Найдена плотность металла . . . . . 2 балла
6) Записано выражение для объёма керосина . . . . . 1 балл
7) Найдено значение $x$ . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

При отсутствии обоснования, что куб в воду погружён частично, балл за пункт 1 не ставить, но остальные пункты оценивать независимо.

**Задача 9.3. Эксперименты на удалёнке.**
Экспериментатор Иннокентий Иванов провёл от удалённого источника постоянного напряжения провода в свою лабораторию. Уже находясь на своём рабочем месте, он вспомнил, что забыл измерить напряжение на выводах этого источника. Не растерявшись, Иннокентий взял резистор сопротивлением 20 Ом и присоединил его к концам проводов. Измерения показали, что напряжение на резисторе равно 9 В. Когда же он заменил этот резистор на другой, с сопротивлением 50 Ом, измеренное напряжение оказалось равным 12,5 В. Наконец, не меняя подключённого резистора, учёный срезал изоляцию с провода в двух местах на расстоянии 40 см друг от друга (с одной стороны от резистора) и измерил напряжение между этими точками. Теперь он получил значение 10 мВ. Чему равно напряжение на выводах источника и общая длина проводов? Провода, использованные Иннокентием, имеют постоянное сечение и сделаны из одного материала. Вольтметр учёного можно считать идеальным.

**Ответ:** 16,9 В, 175 м.

**Решение:** Определим сначала ток через резистор в первом и втором случае:

$$I_1 = \frac{9\text{ В}}{20\text{ Ом}} = 0{,}45\text{ А}, \qquad I_2 = \frac{12{,}5\text{ В}}{50\text{ Ом}} = 0{,}25\text{ А}.$$

Пусть $\lambda$ — сопротивление единицы длины проводов, $L$ — общая их длина, а $U_0$ — напряжение на выводах источника. Во втором и третьем эксперименте цепь одинаковая, поэтому

$$I_2 = \frac{0{,}01\text{ В}}{\lambda \cdot 0{,}4\text{ м}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{0{,}01\text{ В}}{0{,}25\text{ А} \cdot 0{,}4\text{ м}} = 0{,}1\text{ Ом/м}.$$

Запишем соотношения между напряжением на проводах и силой тока в них для первого и второго эксперимента:

$$\begin{cases} U_0 - 9\text{ В} = I_1 \cdot \lambda L, \\ U_0 - 12{,}5\text{ В} = I_2 \cdot \lambda L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_0 - 9\text{ В}}{U_0 - 12{,}5} = \frac{I_1}{I_2} = 1{,}8 \quad \Rightarrow \quad U_0 = 16{,}875\text{ В} \approx 16{,}9\text{ В}.$$

Отсюда получаем, что

$$L = \frac{U_0 - 9\text{ В}}{I_1 \lambda} = \frac{16{,}875\text{ В} - 9\text{ В}}{0{,}45\text{ А} \cdot 0{,}1\text{ Ом/м}} = 175\text{ м}.$$

**Критерии:**
1) Найдены токи через резисторы в первом и втором случаях . . . . . 1 балл
2) Найдено сопротивление единицы длины проводов . . . . . 1 балл
3) Записана связь между напряжением на источнике и силой тока в первом эксперименте . . . . . 2 балла
4) Записана связь между напряжением на источнике и силой тока во втором (третьем) эксперименте . 2 балла
5) Найдено напряжение на источнике $U_0$ . . . . . 2 балла
6) Найдена общая длина проводов . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*
Числовые значения токов и $\lambda$ находить не обязательно, учащимся достаточно записать соответствующие формулы. Кроме того, эти формулы могут быть частью выражений в пунктах 3, 4 и 6. В этом случае баллы за пункты 1 и/или 2 ставить автоматически.

**Задача 9.4. Опыты по выходным.**

Сидя дома в воскресенье, девочка Наташа решила поэкспериментировать. Она принесла из морозилки 100 г льда, положила в калориметр и налила туда 180 г воды. После установления теплового равновесия выяснилось, что в калориметре осталось 75 г нерастаявшего льда. Наташа повторила свой опыт, взяв из морозилки то же количество льда, но налив 270 г воды. В этот раз в калориметре осталось только 55 г нерастаявшего льда.

1. Определите начальную температуру воды, которую Наташа наливает в калориметр.

2. Какая масса льда будет в калориметре после установления теплового равновесия, если Наташа в третий раз повторит свой опыт, но нальёт в калориметр 27 г воды? Количество льда, взятого из морозилки, то же, что и в предыдущих опытах.

Начальная температура воды во всех трёх опытах была одинаковой. Теплоёмкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг·℃), льда — 2100 Дж/(кг·℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг.

**Ответ:** 1) 17,5 ℃; 2) 109 г.

**Решение:** Пусть $t$ — начальная температура воды. Температура льда в морозилке не равна нулю, поэтому льду, для того чтобы начать плавление, нужно передать некоторое количество теплоты $Q$. Запишем уравнения теплового баланса для первых двух опытов:

$$Q + \lambda(100\ \text{г} - 75\ \text{г}) = \text{c}_\text{в} \cdot 180\ \text{г} \cdot (t - 0\,℃),$$

$$Q + \lambda(100\ \text{г} - 55\ \text{г}) = \text{c}_\text{в} \cdot 270\ \text{г} \cdot (t - 0\,℃).$$

Вычитая их, находим

$$\lambda \cdot 20\ \text{г} = \text{c}_\text{в} \cdot 90\ \text{г} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\lambda \cdot 20\ \text{г}}{\text{c}_\text{в} \cdot 90\ \text{г}} \approx 17{,}5\,℃.$$

В третьем случае воды слишком мало, чтобы начать топить лёд. Наоборот, вода начнёт замерзать, и к 100 г льда добавится ещё $\Delta m$. Запишем ещё раз уравнение теплового баланса:

$$Q = \lambda \Delta m + \text{c}_\text{в} \cdot 27\ \text{г} \cdot (t - 0\,℃).$$

Подставляя выражение для $Q$ и $t$ в первое уравнение, получаем

$$\lambda \Delta m + \text{c}_\text{в} \cdot 27\ \text{г} \cdot t + \lambda \cdot 25\ \text{г} = \text{c}_\text{в} \cdot 180\ \text{г} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \lambda(25\ \text{г} + \Delta m) = c_\text{в} \cdot 153\ \text{г} \cdot t = \lambda \cdot 34\ \text{г} \quad \Rightarrow \quad \Delta m = 9\ \text{г}.$$

Отсюда следует, что масса льда в третьем опыте будет равна 100 г + 9 г = 109 г.

**Критерии:**

1) Записано уравнение теплового баланса в первом случае . . . . . . . . . . 1 балл
2) Записано уравнение теплового баланса во втором случае . . . . . . . . . . 1 балл
3) Найдена начальная температура воды . . . . . . . . . . 2 балл
4) Записано уравнение теплового баланса в третьем случае . . . . . . . . . . 3 балла
5) Найдено $\Delta m$ . . . . . . . . . . 2 балла
6) Найдена масса льда в третьем опыте . . . . . . . . . . 1 балл

*Указание проверяющим:* Для ориентировки, температура льда в морозилке равна −23,6 ℃.

**Задача 9.5. Современное искусство.**
На стене комнаты висит картина $K$ высотой 0,9 м, верхний край которой находится на расстоянии 1,7 м от пола (см. рис. 9.1). Мальчик Паша решил, что картина висит вверх ногами, и положил на пол зеркало $З$. В результате оказалось, что минимальное расстояние от стены, на котором Паша может видеть в зеркале всю картину целиком, равно 2,7 м.
1. Чему равно расстояние от пола до глаз Паши?
2. Каково максимально возможное расстояние до стены, при котором мальчик будет видеть в зеркале всю картину?
Расстояние от краёв зеркала до стены равно 1,0 м и 2,5 м. Паша всегда рассматривает картину, не приседая и не подпрыгивая. Толщиной зеркала и картины пренебречь.

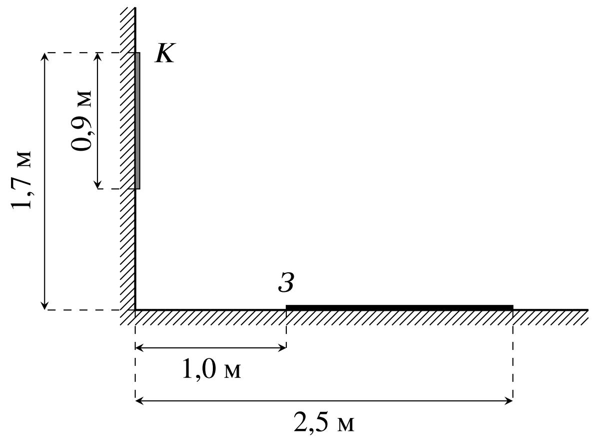

Рис. 9.1.

**Ответ:** 1) 1,36 м; 2) 4,5 м.

**Решение:** Отразим картину в зеркале. Проведём прямые, соединяющие верхний (по рис. 9.2) край отражения $K'$ с краями зеркала. Они ограничивают область, из которой видно этот край картины. Сделаем теперь то же самое для нижнего края отражения $K'$. Пересечение полученных областей — это область, из которой видно и верхний, и нижний край картины (на рис. 9.2 закрашенная область).

Найдём расстояние $h$ от пола до глаз Паши. Для этого проведём перпендикуляр к полу на расстоянии 2,7 м от стены до пересечения его с левой границей области видимости. Из подобия треугольников получим, что

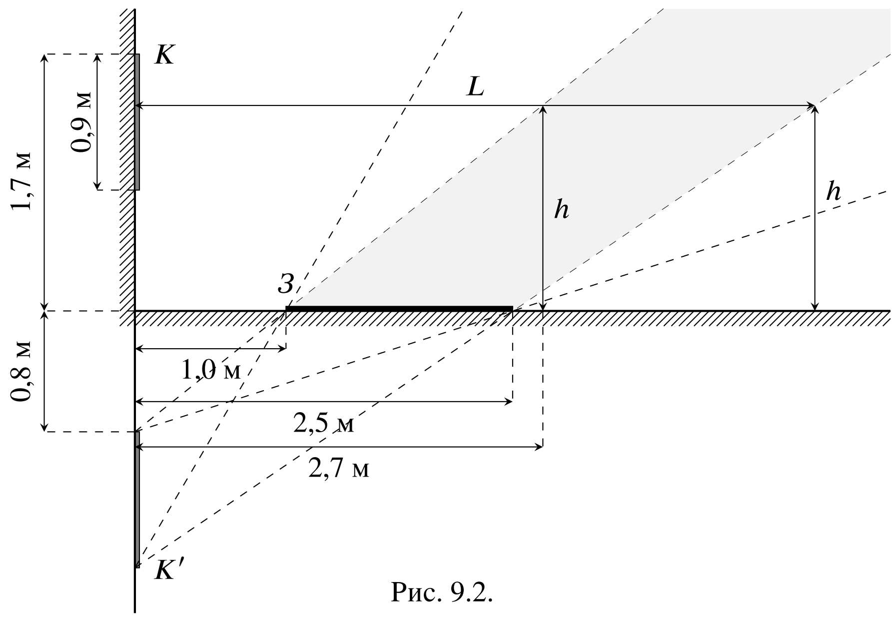

Рис. 9.2.

$$\frac{h}{2{,}7\text{ м} - 1{,}0\text{ м}} = \frac{0{,}8\text{ м}}{1{,}0\text{ м}} \quad \Rightarrow \quad h = 1{,}36\text{ м}.$$

Если $L$ — максимальное расстояние, с которого Паша видит картину, то перпендикуляр к полу, построенный на расстоянии $L$ от стены, должен пересекаться с правой границей области видимости на той же самой высоте $h$. Из подобия найдём, что

$$\frac{h}{L - 2{,}5\text{ м}} = \frac{1{,}7\text{ м}}{2{,}5\text{ м}} \quad \Rightarrow \quad L = 4{,}5\text{ м}.$$

**Критерии:**

1) Обоснованно определены границы области, из которой видно всю картину . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
2) Записано правильное уравнение для нахождения $h$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
3) Найдено верное числовое значение $h$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
4) Записано правильное уравнение для нахождения $L$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
5) Найдено верное числовое значение $L$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла

*Указания проверяющим:*
1) Область видимости может быть построена отличным от авторского способом. Нужно проверять обоснованность построения.
2) Если обоснование отсутствует, а учащийся просто провёл две границы, баллы за пункт 1 не ставить. Остальные пункты оцениваются независимо.

Максимально возможный балл в 9 классе . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

## 10 класс

**Задача 10.1. Архив Лосяша.**

Учёный Лосяш, разбирая архив, нашёл своё старое исследование по баллистике. Там он увидел незаконченный чертёж (рис. 10.1), где на координатной сетке были нанесены три положения тела, брошенного под некоторым углом к горизонту, в различные моменты времени. В подписи к чертежу было указано, что масштаб по обеим осям одинаковый, а ускорение свободного падения направлено вдоль оси $y$.

1. Определите, под каким углом к горизонту направлен вектор скорости в каждой из трёх отмеченных на чертеже точек.
2. Найдите отношение скоростей в левой и правой точках.

Сопротивлением воздуха пренебречь.

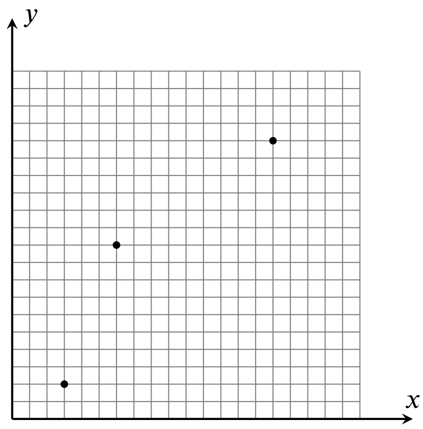

Рис. 10.1.

**Ответ:** 1) $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{19}{6} \approx 72{,}5^\circ$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{13}{6} \approx 65{,}2^\circ$, $|\alpha_3| = \operatorname{arctg}\frac{5}{6} \approx 39{,}8^\circ$; 2) 2,55.

**Решение:** Пронумеруем точки на рисунке слева направо числами от 1 до 3. Пусть $s$ — расстояние, соответствующее одной клетке, $v_i$ — скорость в $i$-й точке, а $T$ — время, за которое тело перелетело из точки 1 в точку 2.

Так как горизонтальная проекция скорости тела постоянна, из точки 1 в точку 3 тело попадёт за время $4T$. Соответствующие вертикальные проекции перемещения:

$$\Delta y_{12} = 8s = v_{1y}T - \frac{gT^2}{2}, \qquad \Delta y_{13} = 14s = v_{1y}\cdot 4T - \frac{16gT^2}{2}.$$

Из этих формул получаем, что

$$s = \frac{v_{1y}T}{8} - \frac{gT^2}{16} = \frac{2v_{1y}T}{7} - \frac{4gT^2}{7} \quad \Rightarrow \quad v_{1y} = \frac{19gT}{6},\ s = \frac{gT^2}{3}.$$

Проекция скорости тела на горизонтальную ось, следовательно, равна $v_x = 3s/T = gT$. Запишем выражения для вертикальной проекции скорости в точках 2 и 3:

$$v_{2y} = v_{1y} - gT = \frac{13gT}{6}, \qquad v_{3y} = v_{1y} - 4gT = -\frac{5gT}{6}.$$

Отсюда найдём углы наклона вектора скорости:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_{1y}}{v_x} = \frac{19}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{19}{6} \approx 72{,}5^\circ, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{v_{2y}}{v_x} = \frac{13}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{13}{6} \approx 65{,}2^\circ,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{v_{3y}}{v_x} = -\frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad |\alpha_3| = \operatorname{arctg}\frac{5}{6} \approx 39{,}8^\circ.$$

Отношение скоростей в первой и третьей точке равно

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{\sqrt{v_{1y}^2 + v_x^2}}{\sqrt{v_{3y}^2 + v_x^2}} = \frac{\sqrt{(19/6)^2 + 1}}{\sqrt{(5/6)^2 + 1}} \approx 2{,}55.$$

**Критерии:**

1) Время перелёта 1-3 связано со временем перелёта 1-2 или 2-3 . . . . . 1 балл
2) Записаны формулы для $\Delta y_{12}$ и $\Delta y_{13}$ через $T$ или аналогичный параметр . . . . . 2 балла
3) Записаны формулы для $v_{2y}$ и $v_{3y}$ через $T$ или аналогичный параметр . . . . . 1 балл
4) Найдены отношения $v_{iy}/v_x$ для всех точек . . . . . 1 балл за каждую точку (в сумме 3 балла)
5) Найдены углы $\alpha_i$ . . . . . 1 балл
6) Найдено отношение $v_1/v_3$ или $v_3/v_1$ . . . . . 2 балла

*Указания проверяющим:*

1) Учащийся может найти время перелёта 2-3 и связать его с временем 1-2 (например). Соответственно, он запишет выражение для $\Delta y_{23}$. Если всё сделано верно, баллы за пункты 1 и 2 ставить.

2) Углы могут быть записаны через арктангенсы. В этом случае баллы за пункт 5 ставить.

3) Учащийся может рассмотреть полёт тела не от точки 1 в точку 3, а наоборот, от точки 3 в точку 1. Данный подход полностью равноценен авторскому, но в деталях формул может отличаться. При наличии такого решения можно использовать те же критерии, но с заменой точек 1 $\leftrightarrow$ 3.

Для контроля: $\Delta y_{32} = -6s = |v_{3y}|\cdot 3T - 9gT^2/2$.

**Задача 10.2. Оптика будет!**

Луч лазера падает из воздуха на левую (см. рис. 10.2) грань стеклянной призмы под углом $\alpha = 60^\circ$ к её поверхности.
1. Под каким углом $\beta$ к поверхности правой грани он выйдет из призмы, если при переходе из стекла в воздух преломлённый и отражённый лучи перпендикулярны друг другу?
2. Чему равен преломляющий угол призмы $\varphi$?
Показатель преломления стекла $n = 1{,}6$.

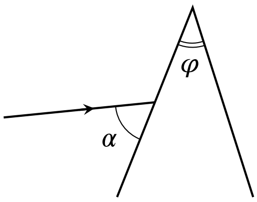


Рис. 10.2.

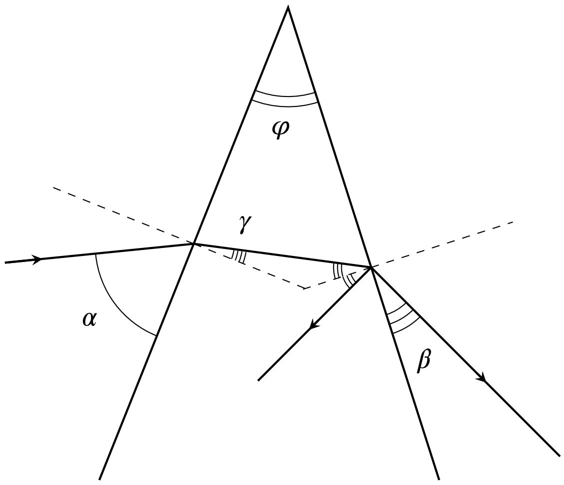


Рис. 10.3.

**Ответ:** 1) $\beta \approx 32{,}0^\circ$; 2) $\varphi \approx 50{,}2^\circ$.

**Решение:** Рассмотрим преломление лучи на правой грани призмы. Так как $\beta$, по условию, угол между лучом и поверхностью, угол преломления в воздухе равен $90^\circ - \beta$. С другой стороны, при переходе из стекла в воздух преломлённый луч должен быть перпендикулярен отражённому (см. рис. 10.3). Отсюда следует, что угол падения луча на правую грань призмы равен $\beta$. По закону преломления

$$\frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \operatorname{arctg}\frac{5}{8} \approx 32{,}0^\circ.$$

Пусть $\gamma$ — угол преломления на левой грани. По закону преломления

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin\gamma} = n \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{n} = \frac{\sin 30^\circ}{n} = \frac{1}{2n} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\frac{1}{2n} = \arcsin\frac{5}{16} \approx 18{,}2^\circ.$$

Сумма углов в треугольнике, образованном гранями призмы и идущим в стекле лучом, равна $180^\circ$. Поэтому

$$(90^\circ - \gamma) + \varphi + (90^\circ - \beta) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi = \gamma + \beta \approx 50{,}2^\circ.$$

**Критерии:**

1) Записан закон преломления для левой грани . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
2) Найден угол преломления $\gamma$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
3) Записана формула $\operatorname{tg}\beta = 1/n$ или её аналог . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 балла
4) Найден угол преломления $\beta$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
5) Записано условие, связывающее $\varphi$ с $\gamma$ и $\beta$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 балла
6) Найдено значение преломляющего угла $\varphi$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл

*Указание проверяющим:* Углы могут быть записаны в виде $\beta = \operatorname{arctg}(5/8)$, $\gamma = \arcsin(5/16)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(5/8) + \arcsin(5/16)$. В этом случае баллы за пункты 2, 4 и 6 (соответственно) ставить.

**Задача 10.3. Тянем-потянем.**

Какова сила натяжения нити, перекинутой через блок, в системе, изображённой на рис. 10.4, если масса верхнего груза равна $m = 200$ г, масса нижнего $M = 800$ г, сила $F = 2{,}5$ Н, а коэффициент трения между грузами $\mu = 0{,}25$? Трение между нижним грузом и горизонтальной поверхностью, на которой он находится, отсутствует. Нити считать горизонтальными, невесомыми и нерастяжимыми. Массой блока и трение в его оси пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с$^2$.

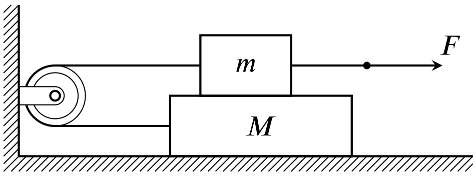


Рис. 10.4.

**Ответ:** 1,7 Н.

**Решение:** Пусть $a$ — ускорение грузов (у верхнего оно направлено вправо, а у нижнего — влево), а $T$ — искомая сила натяжения нити.

Предположим, что $a > 0$. Тогда грузы движутся друг по другу, и сила трения равна $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Запишем 2-й закон Ньютона для обоих грузов:

$$ma = F - T - \mu mg \quad \text{(верхний груз)},$$

$$Ma = T - \mu mg \quad \text{(нижний груз)}.$$

Отсюда следует, что

$$(m + M)a = F - 2\mu mg = 2{,}5\ \text{Н} - 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0,$$

то есть наше предположение верно. Найдём силу натяжения $T$:

$$\frac{m}{M} = \frac{F - T - \mu mg}{T - \mu mg} \quad \Rightarrow \quad (m + M)T + (M - m)\mu mg = MF \quad \Rightarrow \quad T = \frac{MF - (M - m)\mu mg}{m + M} = 1{,}7\ \text{Н}.$$

**Критерии:**

1) Указано, что силы трения, действующие на оба груза, одинаковы по модулю . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
2) Записан 2-й закон Ньютона для верхнего груза . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 балла
3) Записан 2-й закон Ньютона для нижнего груза . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
4) Обосновано, что сила трения достигает максимального значения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
5) Формула $F_{\text{тр}} = \mu mg$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
6) Найдено значение $T$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

1) Указание может быть сделано на чертеже или сразу в записи 2-го закона Ньютона. В этих случаях балл за пункт 1 ставится.
2) Обоснование, что сила трения равна силе трения скольжения (пункт 4), может отличаться от авторского. Например, достаточно предъявить числовое значение ускорения. Остальные пункты критериев оцениваются независимо.
3) Если пункт 1 отсутствует, балл за пункт 5 критериев не ставить!
4) Если в пункте 6 числовое значение $T$ неверное, но учащийся записал правильную конечную формулу для подсчёта $T$, за пункт 6 ставить 1 балл из 2.

**Задача 10.4. Нагрев проводников.**

У экспериментатора Иннокентия Иванова есть три цилиндрических проводника, сделанных из одного и того же тугоплавкого материала (размеры указаны на рис. 10.5), к торцам которых он по очереди подключает источник постоянного напряжения. Когда Иннокентий подключил источник к проводнику №1, тот нагрелся до температуры 120 ℃. Второй проводник смог нагреться уже до 280 ℃. До какой температуры сможет нагреться проводник №3? Температура воздуха в комнате равна $t_0 = 20$ ℃. Удельное сопротивление материала зависит от его температуры $t$ по закону $\rho = \rho_0(1+\alpha(t-t_0))$, где $\rho_0$ — удельное сопротивление при комнатной температуре $t_0$, а $\alpha$ — некоторый коэффициент. Считать, что мощность теплоотдачи от проводника пропорциональна разности температур между ним и воздухом, а также площади его **боковой** поверхности.

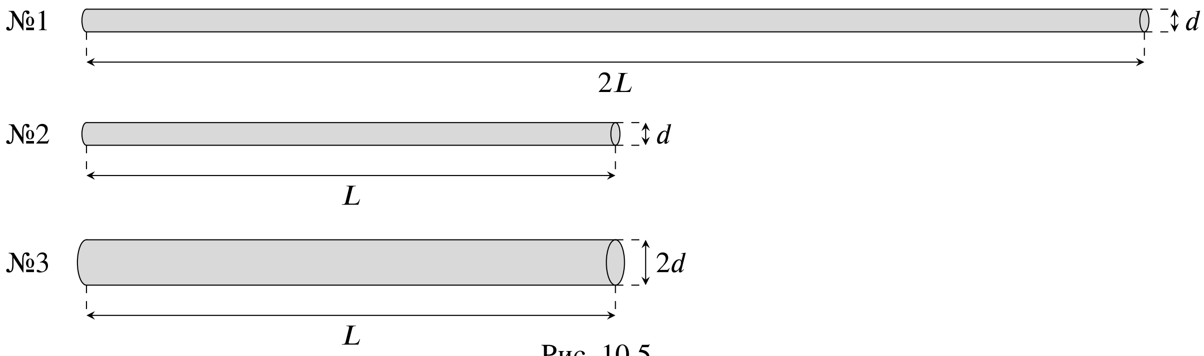


Рис. 10.5.

**Ответ:** 420 ℃.

**Решение:** Пусть $U$ — напряжение на выводах источника. Тепловая мощность, выделяющаяся в проводнике длины $l$ и диаметром $d$, нагревшемся до температуры $t$, равна

$$P_{\text{эл}} = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 S}{\rho l} = \frac{\pi d^2 U^2}{4l\rho_0(1+\alpha(t-t_0))}.$$

Так как площадь боковой поверхности проводника $S_{\text{бок}} = \pi d l$, мощность теплоотдачи от такого проводника равна $P_{\text{отд}} = k \cdot \pi d l(t-t_0)$, где $k$ — коэффициент пропорциональности. Если $t$ — установившаяся температура, то вся мощность, выделяемая в проводнике, должна отдаваться воздуху, поэтому

$$P_{\text{эл}} = P_{\text{отд}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi d^2 U^2}{4l\rho_0(1+\alpha(t-t_0))} = k\cdot \pi d l(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{U^2 d}{4kl^2} = (t-t_0)\cdot\big(1+\alpha(t-t_0)\big).$$

В случаях №1 и №2 длина $l_1 = 2L$, $l_2 = L$, диаметры одинаковы, а температуры равны $t_1 = 120$ ℃ и $t_2 = 280$ ℃. Подставляя данные, получаем

$$\begin{cases} U^2 d/(16kL^2) = 100\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 100\,℃), \\ U^2 d/(4kL^2) = 260\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 260\,℃) \end{cases} \Rightarrow\ 260\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 260\,℃) = 4\cdot 100\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 100\,℃)\ \Rightarrow\ \alpha \approx 0{,}005\,℃^{-1}.$$

В третьем случае $l_3 = L$, а диаметр равен $2d$, поэтому

$$U^2\cdot 2d/(4kL^2) = (t_3-t_0)\cdot\big(1+\alpha\cdot(t_3-t_0)\big)\ \Rightarrow\ 8\cdot 100\,℃\cdot(1+\alpha\cdot 100\,℃) = (t_3-t_0)\cdot\big(1+\alpha\cdot(t_3-t_0)\big).$$

Подставляя значение $\alpha$, получаем

$$0{,}005\,℃^{-1}\cdot(t_3-t_0)^2 + (t_3-t_0) = 1200\,℃ \quad\Rightarrow\quad t_3 - t_0 = (-1\pm 5)/(0{,}01)\,℃.$$

Отбрасывая нефизический отрицательный корень, находим, что $t_3 = t_0 + 400\,℃ = 420$ ℃.

**Критерии:**

1) Записано выражение для $P_{\text{эл}}$ через $\rho_0$, $t$ и размеры в каком-либо случае (или в общем случае) . . . . . . . . . . . 1 балл
2) Записано выражение $P_{\text{отд}} = kS_{\text{бок}}(t-t_0)$ или аналог . . . . . . . . . . . 1 балл
3) Записано выражение для $S_{\text{бок}}$ в каком-либо случае (или в общем случае) . . . . . . . . . . . 1 балл
4) Записано равенство $P_{\text{эл}} = P_{\text{отд}}$ для каждого проводника . . . . . . . . . . . 1 балл за каждый случай (в сумме 3 балла)
5) Найден тепловой коэффициент $\alpha$ . . . . . . . . . . . 2 балла
6) Найдена температура $t_3$ . . . . . . . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

1) Учащийся может записывать выражения не для мощностей, а для теплот, сразу умножая мощности на некоторое общее время. В случае верно написанных формул баллы ставить по соответствующим пунктам критериев в полном объёме.
2) Если учащийся сразу записывает верное выражение для $P_{\text{отд}}$ с уже подставленной $S_{\text{бок}} = \pi l d$ (или аналогом для нужного ему случая), баллы за пункт 2 ставить автоматически.
3) В пункте 4 принимать только уравнения в «расшифрованном» виде, с подставленными выражениями для мощностей.
4) Если учащийся сразу пишет верные формулы для $P_{\text{эл}}$ и/или $P_{\text{отд}}$ внутри уравнений из пункта 4, баллы за пункты 2,3 и/или 1 ставить автоматически.
5) В зависимости от степени округления значения $\alpha$, ответ в пункте 6 может незначительно отличаться (419 – 421 ℃).

**Задача 10.5. Равновесие изогнутого стержня.**

Тонкий однородный стержень массой $M$, согнутый под прямым углом, шарнирно закреплён на опоре так, что в положении равновесия его длинная часть является горизонтальной (рис. 10.6). Груз какой массы $m$ нужно подвесить к левому концу стержня, чтобы в новом положении равновесия его длинная часть образовала угол $\alpha$ с горизонтом? Длина короткой части (на рис. 10.6 она расположена вертикально) равна одной трети длины всего стержня. Трение в шарнире отсутствует.

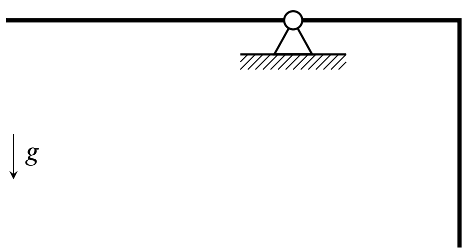


Рис. 10.6.

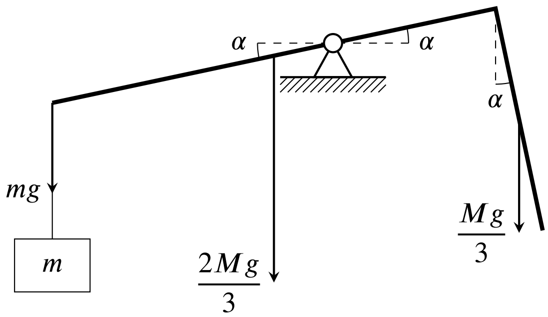


Рис. 10.7.

**Ответ:** $M/8 \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

**Решение:** Рассмотрим равновесие стержня без груза. Пусть $L$ — длина вертикальной части стержня, $2L$ — длина оставшейся (горизонтальной) части. Запишем правило моментов относительно шарнира и найдём расстояние $x$ от центра тяжести горизонтальной части до шарнира:

$$\frac{2Mg}{3} \cdot x = \frac{Mg}{3} \cdot (L - x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{3}.$$

Рассмотрим теперь правило моментов относительно шарнира для стержня с грузом:

$$mg \cdot (L + x)\cos\alpha + \frac{2Mg}{3} \cdot x\cos\alpha = \frac{Mg}{3} \cdot \left((L - x)\cos\alpha + \frac{L}{2}\sin\alpha\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4mgL\cos\alpha}{3} + \frac{2MgL\cos\alpha}{9} = \frac{MgL}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M\operatorname{tg}\alpha}{8}.$$

**Критерии:**

1) Записано правило моментов относительно шарнира в первом случае . . . . . . . . . . 2 балла
2) Найдено смещение центра масс длинной части стержня относительно шарнира . . . . . . 2 балла
3) Записано правило моментов во втором случае . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 балла
4) Найдено значение $m$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

1) В пункте 1 учащийся может рассмотреть отдельно силы тяжести на левый и правый кусок горизонтальной части стержня. Если всё сделано верно, баллы за пункт 1 ставить.
2) В пункте 2 учащийся может найти иной параметр, характеризующий смещение стержня относительно шарнира (не обязательно $x$).
3) Поиск центра масс (ЦМ) **всего** стержня соответствует пункту 1 критериев. Если он выполнен верно (достаточно его положения по горизонтали), ставить полный балл за этот пункт. Для ориентировки, ЦМ всего стержня находится на расстоянии $2L/3$ левее и на расстоянии $L/6$ ниже его угла.
4) Учащийся может указать, что ЦМ **всего** стержня находится точно под шарниром. Если положение ЦМ уже верно определено, то за данное утверждение ставить полный балл в пункте 2.
5) Если это утверждение сделано, но положение центра масс не определено, то за пункт 2 ставить 1 балл из 2, а за пункт 1 баллы не ставить.

Максимально возможный балл в 10 классе . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

## 11 класс

**Задача 11.1. Одновременное падение.**

Из одной точки на земле одновременно брошены два тела: первое — под углом $\alpha = 30^\circ$, второе — под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонту. Определите начальные скорости тел, если они одновременно упали обратно на землю на расстоянии $\Delta L = 4$ м друг от друга. Рассмотрите все возможные варианты, считая, что траектории движения обоих тел лежат в одной плоскости. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с$^2$. Сопротивление воздуха не учитывать, а поверхность земли считать горизонтальной.

**Ответ:** $\upsilon_1 = 8{,}3$ м/с, $\upsilon_2 = 4{,}8$ м/с или $\upsilon_1 = 3{,}4$ м/с, $\upsilon_2 = 5{,}9$ м/с.

**Решение:** Пусть $\upsilon_1$ — скорость первого тела, а $\upsilon_2$ — скорость второго. Так как они приземляются одновременно, времена их полёта равны:

$$t_1 = t_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\upsilon_1 \sin\alpha}{g} = \frac{2\upsilon_2 \sin\beta}{g} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 \sin 30^\circ = \upsilon_2 \sin 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \upsilon_2\sqrt{3}.$$

Рассмотрим первый вариант, когда точки падения тел находятся по одну сторону от точки старта. В данной случае дальности полёта отличаются на $\Delta L$:

$$\Delta L = L_1 - L_2 = \frac{\upsilon_1^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{\upsilon_2^2 \sin 2\beta}{g} = \frac{\sqrt{3}\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right)}{2g} = \frac{\sqrt{3}\upsilon_2^2}{g}.$$

Отсюда получаем, что

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{g\Delta L}{\sqrt{3}}} \approx 4{,}8 \text{ м/с}, \qquad \upsilon_1 = \sqrt{3} \cdot \upsilon_2 \approx 8{,}3 \text{ м/с}.$$

Теперь рассмотрим второй вариант, когда точки падения тел находятся по разные стороны от точки старта. Здесь

$$\Delta L = L_1 + L_2 = \frac{\upsilon_1^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{\upsilon_2^2 \sin 2\beta}{g} = \frac{\sqrt{3}\left(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2\right)}{2g} = \frac{2\sqrt{3}\upsilon_2^2}{g}.$$

Отсюда

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{g\Delta L}{2\sqrt{3}}} \approx 3{,}4 \text{ м/с}, \qquad \upsilon_1 = \sqrt{3} \cdot \upsilon_2 \approx 5{,}9 \text{ м/с}.$$

**Критерии:**

1) Записана формула для времени полёта для каждого тела . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
2) Записано условие равенства времён полёта . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
3) Найдена связь между скоростями $\upsilon_1 = \upsilon_2\sqrt{3}$ или её аналог . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
4) Получена связь между $\Delta L$ и одной из скоростей $\upsilon_1$ (или $\upsilon_2$) в первом случае . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
5) Получена связь между $\Delta L$ и одной из скоростей $\upsilon_1$ (или $\upsilon_2$) во втором случае . . . . . . . . . . . . . 2 балла
6) Найдены скорости $\upsilon_1$ и $\upsilon_2$ в первом случае . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
7) Найдены скорости $\upsilon_1$ и $\upsilon_2$ во втором случае . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл

*Указание проверяющим:*

В пунктах 3, 4 и 5 формулы могут быть приведены без подставления числовых значений $\alpha$ и $\beta$.

**Задача 11.2. Тяни-толкай.**

Если на маленький брусок, лежащий на шершавой поверхности, действовать силой $F$, направленной горизонтально вправо (рис. 11.1а), он будет двигаться с ускорением $a_1 = 1$ м/с$^2$.
1. Каким станет ускорение бруска $a_2$, если та же сила $F$ направлена вниз и вправо под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (см. рис. 11.1б)?
2. С каким ускорением $a_3$ будет двигаться брусок, если сила $F$ направлена вверх и вправо под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (см. рис. 11.1в)?
Коэффициент трения скольжения бруска о поверхность равен $\mu = 0{,}4$, а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$. Поверхность считать горизонтальной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

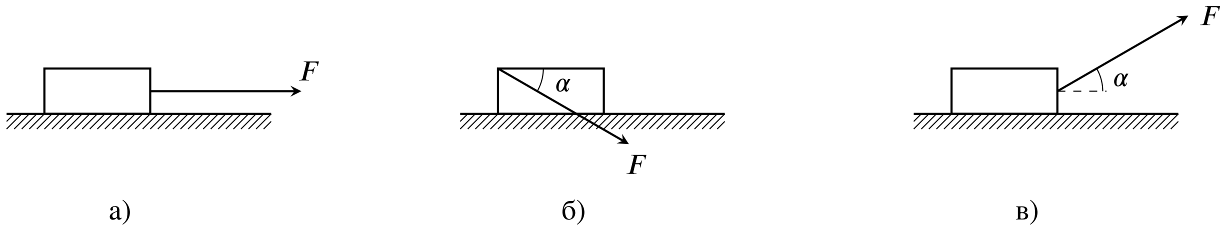


Рис. 11.1.

**Ответ:** 1) $a_2 = 0$; 2) $a_3 = 1{,}33$ м/с$^2$.

**Решение:** Пусть $m$ — масса бруска. В первом случае

$$ma_1 = F - \mu mg \quad \Rightarrow \quad F = m(a_1 + \mu g).$$

Рассмотрим второй случай и предположим, что $a_2 > 0$. Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальную и вертикальную оси ($N$ — сила реакции опоры):

$$\begin{cases} ma_2 = F\cos\alpha - \mu N, \\ 0 = N - F\sin\alpha - mg \end{cases} \Rightarrow \quad ma_2 = F\cos\alpha - \mu(mg + F\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad ma_2 = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu mg \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = (a_1 + \mu g)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu g = 5\ \text{м/с}^2 \cdot (0{,}866 - 0{,}2) - 4\ \text{м/с}^2 = -0{,}67\ \text{м/с}^2 < 0.$$

Отсюда видно, что наше предположение неверно, и $a_2 = 0$.

Рассмотрим теперь третий случай и снова предположим, что $a_3 > 0$. Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальную и вертикальную оси ($N'$ — сила реакции опоры):

$$\begin{cases} ma_3 = F\cos\alpha - \mu N', \\ 0 = N' + F\sin\alpha - mg \end{cases} \Rightarrow \quad ma_3 = F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad ma_3 = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = (a_1 + \mu g)(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g = 5\ \text{м/с}^2 \cdot (0{,}866 + 0{,}2) - 4\ \text{м/с}^2 = 1{,}33\ \text{м/с}^2 > 0.$$

В третьем случае наше предположение верно, поэтому $a_3 = 1{,}33$ м/с$^2$.

**Критерии:**

1) Записан 2й закон Ньютона в первом случае . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
2) Записан 2й закон Ньютона во втором случае (в проекции на обе оси) 1 балл за уравнение (в сумме 2 балла)
3) Обосновано, что $a_2 = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
4) Записан 2й закон Ньютона в третьем случае (в проекции на обе оси) 1 балл за уравнение (в сумме 2 балла)
5) Найдено значение $a_3$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла

**Задача 11.3. Подъём груза.**

Груз массой $m$, насаженный на вертикальную гладкую спицу, тянут вверх, прикладывая к нити, перекинутой через неподвижный блок, постоянную горизонтальную силу. Ось блока находится на расстоянии $L$ от спицы. В начальный момент груз имеет нулевую скорость и расположен так, как показано на рис. 11.2.

1. С какой наименьшей силой $F$ нужно тянуть, чтобы груз смог подняться до уровня оси блока?

2. Какова **в этом случае** будет максимальная скорость груза в процессе его движения?

Нить считать невесомой и нерастяжимой. Размерами блока и груза пренебречь. Трение в оси блока отсутствует.

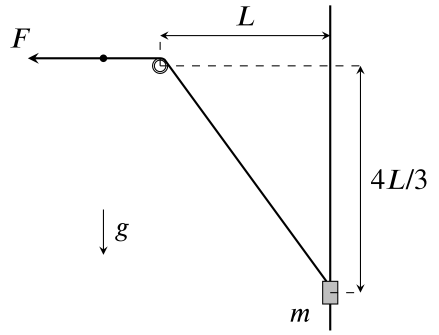


Рис. 11.2.

**Ответ:** 1) $F_{min} = 2mg$; 2) $v_{max} = (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{gL}$.

**Решение:** Движение груза вдоль спицы происходит с переменным ускорением!

1. Чтобы найти наименьшую силу $F$, рассмотрим критический случай, когда скорость груза на уровне оси блока равна нулю. Запишем связь между изменением полной энергии груза и работой силы $F$. Работа равна

$$A = F\Delta s = F \cdot \left( \sqrt{L^2 + \left(\frac{4L}{3}\right)^2} - L \right) = F \cdot \left( \frac{5L}{3} - L \right) = \frac{2FL}{3}.$$

Так как начальная скорость тоже равна нулю, изменение полной энергии в критическом случае равно увеличению потенциальной энергии. Отсюда получаем, что

$$mg \cdot \frac{4L}{3} = \frac{2F_{min}L}{3} \quad \Rightarrow \quad F_{min} = 2mg.$$

2. Если скорость груза максимальна, то его ускорение равно нулю. Это значит, что силы, действующие на груз, компенсируют друг друга. Пусть груз к этому моменту поднялся на высоту $h$, а нить образовала угол $\alpha$ со спицей. Запишем условие равенства сил в проекции на спицу:

$$F_{min} \cos\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\alpha = L/(4L/3 - h) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} \cdot (4L/3 - h) = L \quad \Rightarrow \quad h = 4L/3 - L/\sqrt{3}.$$

Запишем снова связь между изменением полной энергии груза и работой силы $F$:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} + mgh = F \cdot \left( \frac{5L}{3} - \frac{L}{\cos\alpha} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_{max}^2}{2} + mg \cdot \left( \frac{4L}{3} - \frac{L}{\sqrt{3}} \right) = 2mg \cdot \left( \frac{5L}{3} - \frac{2L}{\sqrt{3}} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_{max}^2 = gL \cdot \left( 4 - 2\sqrt{3} \right) = gL \cdot \left( \sqrt{3} - 1 \right)^2 \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{gL} \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

**Критерии:**

1) Указано, что на уровне оси блока в критическом случае скорость груза равна нулю . . . . . . . . . . . 1 балл
2) Записано выражение для работы силы $F$ по подъёму груза до уровня оси . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
3) Найдено значение минимальной силы $F_{min}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла
4) Найдено положение, где ускорение груза равно нулю . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 балл
5) Записано выражение для работы силы $F$ по подъёму груза до места, где скорость максимальна . . . 2 балла
6) Найдено значение $v_{max}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 балла

*Указания проверяющим:*

1) В пункте 4 достаточно найти $h$ (или $L - h$) или $\alpha$, соответствующие положению груза.
2) В пунктах 2 и 5 учащийся должен привести «расшифрованные» выражения. Формулы $A = F\Delta s$ недостаточно.
3) Коэффициент при $\sqrt{gL}$ может быть записан в любой из тождественных форм, например: $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$, 0,73 и т.п. Баллы во всех таких случаях ставить.

**Задача 11.4. Изучаем цикл.**
Одноатомный идеальный газ совершает цикл 1-2-3-4-1 (см. рис. 11.3), состоящий из двух изохор и двух изобар. Температура газа в точке 1 равна $T_1$, в точке 3 равна $T_3 = 6T_1$, а в точке 2 температура на $T_1$ больше, чем температура в точке 4.
1. Какова температура газа в точках 2 и 4?
2. Какую работу совершит $\nu$ молей газа за этот цикл?
3. Определите КПД данного цикла.

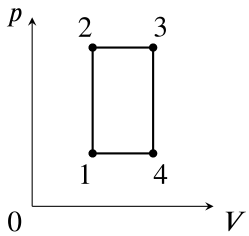


Рис. 11.3.

**Ответ:** 1) $T_2 = 3T_1$, $T_4 = 2T_1$; 2) $A = 2\nu RT_1$; 3) $\eta = 4/21$.

**Решение:** Пусть $T_2$ и $T_4$ — температуры в точках 2 и 4 соответственно, причём по условию $T_2 = T_1 + T_4$. Так как процессы 1-2 и 3-4 изохорные, а давления в точках 2-3 и 1-4 совпадают,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_4 + T_1}{T_1} = \frac{6T_1}{T_4} \quad \Rightarrow \quad T_4^2 + T_1T_4 - 6T_1^2 = 0.$$

Отбрасывая отрицательный корень, получаем, что $T_4 = 2T_1$. Соответственно, $T_2 = 3T_1$.

Работа за цикл равна

$$A = (p_2 - p_1)\cdot(V_3 - V_2) = p_1V_2\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)\cdot\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) = p_1V_2\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\cdot\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right) = 2p_1V_2 = 2\nu RT_1.$$

Количество теплоты, подведенное к газу:

$$Q_+ = Q_{13} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + p_2(V_3 - V_2) = \frac{3}{2}\nu R(6T_1 - T_1) + p_2V_2\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) =$$

$$= \frac{15}{2}\nu RT_1 + \nu R\cdot 3T_1 = \frac{21}{2}\nu RT_1.$$

КПД цикла, соответственно, равен

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{4}{21}.$$

**Критерии:**
1) Записана пропорция между температурами $T_1$, ..., $T_4$ . . . . . . . . . . 1 балл
2) Найдены температуры $T_2$ и $T_3$ . . . . . . . . . . 2 балла
3) Найдено выражение для работы $A = 2\nu RT_1$ . . . . . . . . . . 2 балла
4) Записана формула для расчёта $Q_+$ . . . . . . . . . . 1 балл
5) Найдено выражение $Q_+ = 21/2\cdot\nu RT_1$ . . . . . . . . . . 2 балла
6) Найдено выражение для КПД $\eta = 4/21$ . . . . . . . . . . 2 балла

**Задача 11.5. Заряд имеет значение!**

В цепи, изображённой на рис. 11.4, ключ $K$ вначале разомкнут, конденсатор ёмкостью $3C$ не заряжен, а заряд $q$ конденсатора ёмкостью $C$ отличен от нуля. Определите заряд $q$, если после замыкания ключа в цепи выделяется количество теплоты $Q = C\mathscr{E}^2/4$. Величины $C$ и ЭДС батареи $\mathscr{E}$ считать заданными.

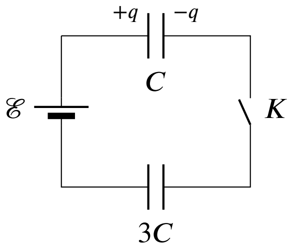


Рис. 11.4.

**Ответ:** $C\mathscr{E}\left(1 \pm \sqrt{2/3}\right)$.

**Решение:** Пусть после замыкания ключа через источник (в положительном направлении) прошёл заряд $\Delta q$. Тогда заряд на конденсаторе $C$ стал равным $q + \Delta q$, а на правой обкладке конденсатора $3C$ появился заряд $\Delta q$. Сумма напряжений на конденсаторах равна ЭДС источника:

$$\frac{q+\Delta q}{C} + \frac{\Delta q}{3C} = \mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad 3q + 4\Delta q = 3C\mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad \Delta q = \frac{3}{4}\cdot(C\mathscr{E} - q).$$

Работа источника $A_{\text{ист}} = \Delta q \cdot \mathscr{E} = 3\mathscr{E}/4 \cdot (C\mathscr{E} - q)$ равна сумме изменения энергии конденсаторов и количества выделившейся теплоты:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W_C + \Delta W_{3C} + Q = \frac{1}{2C}\left((q+\Delta q)^2 - q^2\right) + \frac{\Delta q^2}{6C} + Q = \frac{3}{8C}\left((C\mathscr{E})^2 - q^2\right) + Q \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3C\mathscr{E}^2}{4} - \frac{3q\mathscr{E}}{4} = \frac{3C\mathscr{E}^2}{8} - \frac{3q^2}{8C} + Q.$$

Подставляя выражение $Q = C\mathscr{E}^2/4$, получаем

$$\frac{3q^2}{8C} - \frac{3q\mathscr{E}}{4} + \frac{C\mathscr{E}^2}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 - 2C\mathscr{E}\cdot q + \frac{(C\mathscr{E})^2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = C\mathscr{E}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

**Критерии:**

1) Записаны новые значения зарядов на конденсаторах . . . . . . . . . . . 1 балл
2) Записана формула $q_1/C + q_2/(3C) = \mathscr{E}$ или её аналог . . . . . . . . . . . 1 балл
3) Заряд, прошедший через источник, выражен через $C$, $\mathscr{E}$ и $q$ . . . . . . . . . . . 2 балла
4) Записана формула $A_{\text{ист}} = \Delta W_C + \Delta W_{3C} + Q$ или её аналог . . . . . . . . . . . 1 балл
5) Получено верное уравнение для нахождения $q$ через $C$ и $\mathscr{E}$ . . . . . . . . . . . 3 балла
6) Найдены возможные значения $q$ . . . . . . . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

1) Баллы в пунктах 2 и 4 ставить за само наличие формул, даже если дальнейший ход решения неверен.
2) В пункте 1 балл ставится, если учащийся выбрал такие обозначения для зарядов конденсаторов, что их сумма явно равна $q$, или же в решении должно присутствовать условие $q_1 + q_2 = q$.
3) Если учащийся почему-то оставил только один верный корень уравнения, а второй зачем-то был отброшен, за пункт 6 критериев ставить 1 балл из 2.

Максимально возможный балл в 11 классе . . . . . . . . . . . 50